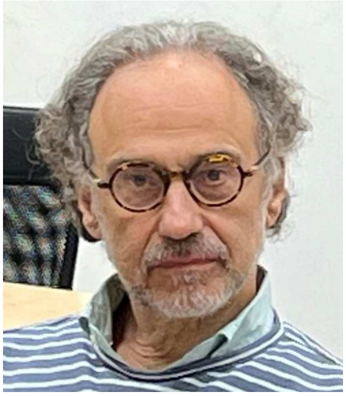
數學傳播 47卷4期, pp. 3-14

有朋自遠方來——專訪 Felipe Cucker 教授



策　劃：劉太平
訪　問：劉太平、尤釋賢
時　間：民國 112 年 11 月 21 日
地　點：中央研究院數學研究所
整　理：編輯室

Felipe Cucker 教授 1958 年 5 月 6 日出生於烏拉圭 Montevideo。他於 1983 年獲巴塞隆那大學 (University of Barcelona) 學士學位, 1986 年獲 University of Cantabria 及 University of Rennes 1 博士學位。他曾在 Polytechnic University of Catalonia 和 Pompeu Fabra University 任教。1996 年之後, 他任教於香港城市大學, 甫於近日退休。Cucker 多方面的興趣, 涵括實代數幾何、電腦科學、複雜性和學習理論。Cucker-Smale 群集 (flocking) 理論引起廣泛注目。他獲選爲巴塞隆那皇家科學與藝術學院的外籍院士。在本次訪談中, 讀者會發現他不尋常的職涯軌跡以及他廣泛的興趣。

劉太平 (以下簡稱「劉」): 無論是學術或其他方面, 你的發展軌跡都非常有趣。我們可否從這裡開始談? 你的童年是怎樣的? 你何以離開烏拉圭, 去了歐洲? 我看了你出生地 Montevideo 的照片, 那是一個非常美麗的城市。

Felipe Cucker (以下簡稱「C」): 多重原因造成的。我十幾歲時, 烏拉圭在 1972-73 年發生了軍事政變。而後, 烏拉圭的生活讓人很不愉快。我的意思是, 你隨時可能被員警或軍方帶走。不一定有危及人身安全的風險, 但偶爾也真會如此。你可能會在警局待整個下午, 只是因爲你沒有隨身攜帶身份證件, 或類似的愚蠢的事。這段時光不僅糟糕, 而且離奇古怪。軍方不

明白的事情很多。他們不明白的一件事, 就是數學的中立性。

烏拉圭是一個小國, 現在仍然如此。它只有 300 萬人口, 所以數學家爲數甚少, 總共有十或十二位。我所指的數學家, 是指積極從事數學研究的人。他們都是左翼人士。烏拉圭最重要的數學家之一, 是一位名叫 José Luis Massera[1]的人; 他既是大學的講座教授, 也是代表烏拉圭共產黨的國會議員。因此, 政變後 Massera 和另外三或四名數學家被判刑入獄。Massera 服監十二年。就這樣, 其他數學家都離開了這個國家。因此, 我高中畢業, 準備上大學時, 在烏拉圭學數學是不可能的, 因爲那裡沒有任何數學家。

烏拉圭地處南半球, 在赴歐之前, 我在烏拉圭還學了六個月的數學。教我拓樸學的是一名經濟系學生。他甚至不是經濟學家。他是經濟系的學生, 他是我的拓樸學老師。你知道, 那時情況就是這樣。

如果你想做數學, 就必須離開烏拉圭。因此, 我造訪了 Montevideo 的一些大使館, 試圖瞭解各國學習數學的不同條件, 結果發現西班牙最容易達成我的願望, 所以最終去了西班牙, 在那裡研修數學。

劉: 是這樣! 讓我說句題外話。你談到了共產主義和數學。Peter Lax[2]告訴過我, 偉大的 Hadamard[3]是共產黨員。但他沒有被捕, 因爲那時他已經證明了質數定理。這救了他。我想你高中時對數學非常感興趣。你知道你想做什麼。

C: 是的。實際上我們有一群同好。當時的烏拉圭, 上大學之前要修兩年較專業的課程。你要上四年的中學, 每個人都是如此; 之後, 你還要上兩年的大學預備課程。如果你要上大學, 就要念這兩年; 在此期間, 主要是修習與未來的大學學習相關的科目。有諸如法律、農學、工程學、醫學等選項; 工程學是最具科技性的選擇, 大半時間在做數學或物理。我們是小型學院裡的一個小班級。念了一年後, 軍方接管, 關閉了這個學院。於是我們不得不另尋其它學院, 能接收我們這些選讀工程學, 已經開始上了課程的學生。我們共約 15 到 20 人。我們找到了一所私立學院, 也被錄取了。

這很有趣, 因爲在這些人中, 我有兩個非常好的朋友, 其中一位想成爲物理學家, 另一位想成爲數學家。我有這兩個非常要好的朋友。最終, 這位物理學家在美國攻讀物理學學位, 而後在美國攻讀物理學博士學位, 目前是法國的講座教授。而那位想成爲數學家的, 和我一起離開 Montevideo。我們一起去了西班牙, 完成了大學部課程。當時在西班牙大學要念五年, 所以是一個耗時甚長的大學學位。我們在巴塞隆那 (Barcelona) 取得學位。而後我繼續在學術界工作, 他基本上專精於電腦的自然語言處理。他當時就已對此感興趣, 但他是一位非常有才能的數學家。

---

[1] José Luis Massera (1915～2002), 烏拉圭數學家, 對微分方程穩定性有重要貢獻。由於左翼政治觀點, 入獄服監多年。

[2] Peter Lax (1926～) 匈牙利出生的美國數學家, 在可積系統、流體動力學、激波、孤子物理學、雙曲守恆律與科學計算等方面有重大貢獻。曾獲沃爾夫獎及阿貝爾獎等。專訪 2002 年刊載於數學傳播 26 卷第 4 期。

[3] Jacques Hadamard (1865～1963), 法國數學家, 最重要貢獻是在 1896 年證明了質數分布定理。他也是泛函分析的先驅者。

劉: 這是一個非常好的故事。

尤釋賢 (以下簡稱「尤」): 我在香港城市大學時, 知道你到香港城市大學之前, 在研究實代數幾何 (real algebraic geometry)。你開始與 Steve Smale[4]合作時, 在研究複雜性。在此同時, 你也在研究優化 (optimization)。你徘徊於這些完全不同的領域。

C: 事實是, 我在這些領域都很糟糕。我未曾擅長過其中任何領域。但確實, 我不知何故對它們之間的交界產生了興趣。

實際上, 我的博士論文研究的是實代數幾何。這不是經典的代數幾何。經典的代數幾何是在代數閉體 (algebraically closed field) 上做, 這是數學中一個最爲優雅的領域。你知道, 從某種意義上說, 因爲複數有如此多美麗的性質, 一切於焉運作良好。如果你有一個多項式, 它的零根都在複數域裡。如果你有可微分的函數, 那麼它就是解析函數。複數令人贊嘆。但確實, 在實際生活中, 它們可能不像實數那樣有用。所以, 我最終做了實代數幾何, 這是當時正在發展的一門學科。我喜歡它, 我在那個領域完成了博士學位, 繼續研究它。

我離開了我在 Santander 任職的大學, 想回到巴塞隆那。爲了達到這目的, 我在巴塞隆那找到的職位不是在數學系, 而是在電腦科學系。那裡的人非常熱情地接納我, 但他們從事的是電腦科學。所以, 我周圍的人都在做電腦科學。他們研究複雜性。我一直在做自己的事情, 但不免會對他們的工作感興趣。1988 年訪問烏拉圭期間, 有人遞給我一份由 Lenore Blum[5]、Michael Shub[6] 和 Steve Smale[7] 撰寫的論文草稿 , 其中的計算和複雜性理論是爲數值計算量身定製的。不是離散的、精確的計算, 而是數值計算, 是當時在 Fortran 中做的那種計算, 是數值分析。我閱讀這篇論文時, 發現它融合了實代數幾何和複雜性。於是我致力於此。一旦你研究複雜性, 就會對那些具典範性的複雜性問題產生興趣; 其中一個問題與線性規劃有關, 因此我最終選擇了線性規劃。這個主題在複雜性領域仍然至關緊要; 在 Steve Smale 爲 21 世紀的數學家提出的問題清單中, 它是第 9 個問題的主題。該問題全然未解; 自提出以來, 25年中毫無任何進展。於是我最終做了一些線性規劃, 然後, 嗯, 做了一點優化, 但你知道, 我從來沒有成爲優化領域的人, 我不能自稱是優化領域的人。但對優化的數值問題, 及其複雜性面向, 我很感興趣。

劉: 這讓我想起了, 有人曾經說過:「不要成爲專家」。不管這意味著什麼。從你所描述的內容來

---

[4]Stephen Smale (1930∼), 美國數學家, 1961 年證明五維或以上的 Poincaré 猜想, 1966 年獲菲爾茲獎, 之後研究動力系統、數理經濟等領域並做出重大貢獻。專訪 2005 年刊載於數學傳播 29 卷第 2 期。

[5]Lenore Blum (1942∼), 美國數學家暨電腦科學家, 在實數計算、密碼學和僞隨機數生成等領域有重要的貢獻。2002 年獲選爲 Noether Lecturer。

[6]Michael Shub (1943∼), 美國數學家, 研究動力系統、實數計算及複雜性。

[7]Lenore Blum, Michasl Shub, Steve Smale, On a theory of computation and complexity over the real numbers: NP-completeness, recursive functions and universal machines, *Bulletin of the American Mathematical Society*, New Series, 21 (1), 1-46, 1989.
Blum-Shub-Smale 模型是在任意環或體上運作的計算理論模型, 它將計算和計算複雜性理論從標準離散情況擴展到連續領域 (例如實數系)。在此模型可定義類似 NP 完備性、不可判定性和普遍性的概念。

看, 某種意義下你對各種主題的關鍵要素感興趣。可以這樣說嗎?

C: 是的, 你知道。在某種意義下, 是的。但你可能會說, 我成了某方面的專家, 儘管我從未嘗試過這樣做。事情就這樣了。

數值問題複雜性的一個面向是: 不同於離散情況下所發生的, 有一大類演算法, 它們在正常情況下的成本沒有一致的有界性。對於某些輸入, 演算法甚至可能無限循環。因此, 在最壞的情況下, 運行時間會是無窮大。爲了衡量複雜性, 你需要考慮不同於尋常最壞情況的方法。後來發現, 通常要考慮的是, 演算法如何依賴於條件 (condition); 當你的條件個數是無窮多時, 那麼當然它需要無限多的步驟。但若你的條件個數有限, 它需要的步驟數是有限的; 步驟數是由條件和數據大小的函數所限制。

我開始試圖理解這些條件個數是何物; 結果發現條件個數的源由, 是計算過程中控制的數值誤差。於是我開始研究這些東西。我寫了幾篇論文, 其中一些是和 Smale 合作的。我還和一位同事 Peter Bürgisser[8]一起做研究, 他目前在柏林。在某瞬間, 我們意識到關於「條件」的結果分散在文獻中, 但沒有一本書專門討論「條件」。你有些數值線性代數的書籍, 它們有一章在定義條件個數; 你有些關於數值非線性代數的書籍, 它們也有這麼一章。與優化書籍一樣, 你可以在其中一些書中找到一章, 告訴你優化問題的「條件」。但是沒有一本書會以「條件」爲主題。所以我們決定寫這樣一本書。我們寫了它, 花了好幾年時間。這本書變得非常厚。這確實是一本關於「條件」的龐大專書[9]。

我們非常幸運, 因爲我們的專著被 Springer (我認爲的) 最負盛名的系列所接受。它是 Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 由 Hilbert 在 1920 年代創立, 一個世紀內出版不到 400 本書, 可見它選書確實十分謹慎。我記得我們自問, 這本書的書名應該是什麼。我們說「Condition」。Springer 對此不盡滿意。他們不喜歡標題是一個單詞。最後, 我告訴他們, 在這系列書中, McLane 寫了一本名爲《*Homology*》的書; 他們接受了我們的論點。爲了取悅 Springer, 我們放了一個副標題, 類似於「數值演算法的幾何」。時至今日, 這本書仍然是關於這個主題的唯一專著, 所以我可以聲稱自己在這領域有一些專業知識。它與許多其它領域交疊。

劉: 那太好了。或許你誤解了我的話。我提到有人說不要成爲專家; 我的意思是, 你試圖找到不同主題之間的關鍵關係, 而不是一直待在一個主題。

C: 不, 我沒有誤會。是的, 我明白。你對一個主題鑽研得越深入, 就會對這個主題越加瞭解, 但卻可能對整個領域瞭解越少 . . . 我的意思是, 當你非常仔細地研究一片葉子時, 就看不到大部分的森林。在這個意義下, 你試圖以某種方式保持平衡。

---

[8]Peter Bürgisser (1958∼), 瑞士數學家暨理論電腦科學家, 研究算法代數和代數複雜度理論。他與 Felipe Cucker 在 2011 年對 Smale 的第 17 個問題做出貢獻, 兩人於 2013 年出版專書《*Condition*》。他目前任教於 Technical University of Berlin。

[9]Bürgisser, Peter; Cucker, Felipe, Condition, The Geometry of Numerical Algorithms, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Vol. 349, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.

劉: 您一直與 Steve Smale 在各種領域合作。與 Steve Smale 的合作情況如何? 是什麼樣的合作?

C: 這真是我的福氣。沒有足夠的言語能表達它。我第一次與 Steve 合作是偶然的。1980 年代, 我在西班牙北部的 Santander 工作了一段時間。攻讀博士學位時, 那裡聘用了我。我在 Santander 的老闆名叫 Tomas Recio[10], 是那裡的代數系主任。即使去了巴塞隆那之後, 我仍然和 Tomas 保持聯繫。Tomas 明白, 我搬到巴塞隆那, 是因爲在某種程度上那是我的城市, 我在 Santander 沒有家的感覺。

有一天 Tomas 打電話到巴塞隆那給我。他說:「我剛從 Berkeley 回來。他們正在進行一個學期的實代數幾何研討會, 很多人都在討論 Blum-Shub-Smale 模型; 你必須去那裡, 因爲我知道你在這個主題上做了一些工作」。他甚至告訴我, 我的訪問將由他的研究專案支付, 他建議我寫信給 Steve Smale。我就照著他的話做了; 也許有點天真, 我附上了自己的一篇論文。之後收到了 Steve Smale 一封手寫的信, 說這篇論文看起來很有趣, 我可以去 Berkeley 拜訪他。

Steve 在 1992 年訪問巴塞隆那, 參加在巴塞隆那舉辦的會議。該會議只是一個小型研討會, 在上世紀末請菲爾茲獎得主發表他們對數學的看法。1993 年, 我在巴塞隆那籌畫了爲期一個學期, 關於數值計算的複雜性的專題。我設法讓 Steve 參加, 還有 Lenore Blum 及 Michael Shub。課程結束時, 我們決定要寫一本關於複雜性和實數計算的書[11]。我們開始寫這本書。

1995 年, Steve 搬到香港, 因爲他必須從 Berkeley 退休。1996 年 2 月, Lenore 及 Michael 到香港拜訪他, 好繼續做研究。我的妻子和我一起來。幾個星期後, 她下了決定。她以一種非常天真的方式告訴我, 香港是一個迷人的地方, 在這裡待一段時間會很好。於是我詢問城市大學, 是否有可能在那裡待一段時間。我接獲回應, 得到一份爲期兩年的合約。所以我們搬到那裡, 之後再也沒有離開過。我可以和 Steve 一起工作很多年 . . . 我只是跟隨他的許多想法。現在回到你的問題, 你知道, 研究一個問題時, 每天都與 Steve 一起工作, 太美好了。

Steve 是一個對自己的想法非常慷慨的人。他在思考某件事時, 會完全被這個問題所吸引。如果你在他身邊, 他就會向你提出這個問題, 並問你是否願意與他合作。因爲我在城市大學, 且和他一起做過研究, 所以每次他向我提出一個主題時, 我都會和他合作。很長一段時間都是如此。但後來我終究止步了, 因爲 Steve 冒險進入對我來說太棘手的領域, 比如計算生物

---

[10] Tomas Recio, 西班牙數學家, 研究代數、幾何、電腦代數和數學教育。他目前任教於馬德里的 the Universidad Antonio de Nebrija。

[11] Lenore Blum, Felipe Cucker, Michael Shub, Steve Smale, *Complexity and Real Computation*, New York: Springer-Verlag, 1998.
在這本書中, 作者認爲圖靈模型的經典複雜性理論不足以研究現代科學計算中的許多問題和演算法。他們發展了可應用於這些領域的複雜性理論。

學。Steve 懂生物學, 而我不懂, 所以我能做的事情有限; 我對此很誠實, 至少對我自己是如此。但在很長一段時間裡, 他向我提出了非常有趣的題目。就是他促使了我開始研究條件個數。

Steve 有很多想法。大多數情況下, 他會遞給你他所謂的草稿; 那是一張紙, 上面寫著一些東西。而後, 我不得不和他交談, 試著理解他寫的東西是何意涵。我想說的是, 100%, 這些草稿上有可以解決問題的想法的種子。當然, 還有工作要做, 但從某種意義上說, Steve 完成了最大部份的工作, 因爲這些種子在那裡, 在那些草稿裡。現在我意識到, 我應該存留其中一些草稿作爲歷史, 因爲它們只是一張手寫的紙, 只有幾行字, 僅此而已。

劉: 與 Smale 的合作之所以成功, 也是因爲你慷慨大方。

C: 當然。這很好。我付出了很多努力和時間, 但是, 你知道, 當有人來告訴你一個絕妙的想法時, 你當然會付出努力和時間去嘗試發展它。在某些案例, Steve 的一些想法, 被我很久之後的研究結果所取代; 當時 Steve 已經完全投入到計算生物學中。幾年前, 我對計算半代數集合 (semi-algebraic set) 的同調性產生了興趣。從以下意義上講, 這是一個完全未解的問題: 有些演算法可以描述具有多項式等式和不等式的集合, 且有一個演算法可計算其同調群, 但它們的複雜度是雙指數的, 因此非常糟糕。人們一直在努力尋找對時間而言是單指數、而非雙指數的演算法。這有點糟糕, 但不是很糟糕。沒有人能夠做到這一點。後來我和很多人一起研究了這個問題, 最後一位是博士生 Josué Tonelli-Cueto[12]。

我們設法設計了一種演算法; 除了度量爲指數級小的一小部分數據外, 該演算法在指數時間內適用於所有數據。這是朝這個方向邁出的巨大進步。這一進展的種子, 是 Steve 在芝加哥與兩個人就另一主題寫的一篇論文, 但給了我可以做些什麼的想法。所以, 即使在我停止與 Steve 合作後, 閱讀他的論文, 仍是我做研究的好主意來源。

劉: 你從烏拉圭搬到西班牙, 與周圍的人互動。而後你搬到了香港。這些是世界的不同地區, 具有不同的文化。但你似乎從 A 到 B 再到 C, 毫無問題。你必然對各種文化有一些觀察: 人們做不同類型的數學, 他們如何相互對待, 等等。

C: 我認爲從這個意義來說, 數學是非常美好的。你去看人文學科時, 我深信你會發現, 在不同文化中, 面對人文學科問題的方式大不相同。然而我看數學時, 有恰好相反的感覺。我認爲, 無論來自北方或南方、東方或西方, 人與人之間毫無差別。我們在數學問題中都做類似的推理。它比一些人文學科更具普遍性。在人文學科, 你會看到那些以根深蒂固的方式思維的人; 這些思維方式來自他們成長的環境。在數學中, 往好處或往壞處想, 我們都不會如此。

我有來自中國、法國、俄羅斯和西班牙的博士生。我和他們一起做研究, 總是很容易相互理

---

[12] Peter Bürgisser, Felipe Cucker, Josué Tonelli-Cueto, Computing the Homology of Semialgebraic Sets. I, II: General formulas, *Foundation of Computational Mathematics*, 71-118, 2019; *Foundation of Computational Mathematics*, 1279-1316, 2021.

解。讓我告訴你一個奇妙的故事。有段時間, 城市大學希望有更多的博士生, 因此我們與中國大陸的一些學院合作, 指導些學生。爲此, 你必須在香港和城市大學在蘇州的學院之間往返。我想指導一個這樣的學生, 於是去了蘇州, 與學生面談。我最後帶走了想在我指導下做研究的唯一學生。他名叫董久剛 (Dong Jiu-Gang)[13]。事到臨頭, 我們才意識到有一個小問題。我不會說 (現在仍然不會說) 一句中文。David, 這是他和我一起時使用的名字; David 真的不會說英語。所以, 突然之間, 我發現自己在指導一個不會說英語的博士生; 他的交流語言是中文, 我不會說。這該如何運作? 結果是, 他可以理解英語, 可以閱讀和寫作。當然, 那不是莎士比亞式的英語, 但足夠好, 足以解釋數學推理。因此, 儘管語言障礙很大, 我還是指導了他的博士論文。我認爲運作順暢的一個原因, 是他研究做得很好。他獲得博士學位, 發表了多篇論文, 目前是哈爾濱工業大學的正教授; 哈爾濱工業大學是中國大陸的好大學。所以, 確實行得通的。我認爲, 儘管我們無法進行太多交流, 數學的這種普遍性, 對所有人來說都別無二致的事實, 自然地使它成爲可能。順便一提, 他的英語進步了很多, 我們現在溝通得更好了。

劉: 是的, 我想我認識那個人。他在韓國待過一段時間嗎?

C: 是的。那時我已經和 Steve 完成了幾篇關於群集 (flocking) 的論文。Steve 不想繼續做這個領域, 所以他結束了這個領域。但是, David 剛巧那時來了, 而我有一些想得到的群集問題, 所以我告訴他那些問題。他解決了這些問題, 之後繼續研究群集。他找到了其他對群集感興趣的人, 而在這個地區最熱衷於群集的, 河承烈 (Seung-Yeal Ha)[14]可能是其中一位。他做了很多工作。可以理解的是, David 住在中國北方, 靠近韓國邊境。他多次訪問首爾, 與河承烈合作。他們一起做了很多工作。他一直在那領域做研究。非常活躍。

尤: 你寫了一本關於藝術和數學之間關係的書[15]。我知道你耗費很多時間寫這本書。

C: 是的。這可以追溯到我十幾歲的時候, 我提過進大學前的那兩年; 有件事會讓你對烏拉圭有個瞭解。在第二年, 我們有三門數學科目: 其一名爲分析, 另一名爲幾何學, 第三門名爲描述性幾何學 (descriptive geometry)。描述性幾何, 你可能沒聽過。這個領域是源自一位 18 世紀名曰 Monge[16]的法國數學家。但是被稱爲幾何學的科目, 本質上是射影幾何學。所以, 在讀大學之前, 在烏拉圭的中學, 我已經在學習射影幾何了。

我記得的一件事, 曾幫助我理解了射影幾何, 因爲射影幾何的基礎, 是平行線不存在, 對吧? 我的意思是, 給定任何兩條線, 如果它們相異, 就會在某個點交叉。當你試圖理解這一點時,

---

[13]董久剛, 研究自組織系統、非線性系統與控制論, 任教於哈爾濱工業大學、大連理工大學。

[14]河承烈 (Seung-Yeal Ha), 南韓數學家, 任教於首爾國立大學, 研究雙曲偏微分方程、動力理論及動力系統。

[15]Felipe Cucker, *Manifold Mirrors: The Crossing Paths of the Arts and Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

[16]Gaspard Monge (1746~1818) 被譽爲微分幾何之父。 他的著作 《幾何分析的應用 (*Application de l'analyseàla géométrie*)》 中引入了三維空間曲面上曲率線的概念。

我仍然記得有人, 可能是我的老師, 給我們看了一幅文藝復興時期的畫。這幅文藝復興時期的畫作的地板是用瓷磚鋪成的。瓷磚畫出平行線。這些平行線確實在某個點相交。老師說: 這是一個觀點問題; 意思是, 從我們的角度來看, 我們看不到平行線交叉, 因爲我們離這個交叉點太遠了。如果你這樣想, 射影幾何對你來說會更容易。所以, 不知何故, 數學和藝術之間的這種互動, 就這樣地留在了我的腦海中。

你知道射影幾何的起源嗎? 很抱歉, 說些題外話, 但這很有趣。是數學家就會喜歡。所謂的射影幾何的數學, 從 19 世紀才起步。法國有一所學校, 現在仍在, 名爲巴黎綜合理工學院 (École Polytechnique)。有別於其他科學學校, 它不仰賴 (即使在今天也不依賴於) 科技部或大學。它仰賴國防部。因此, 巴黎綜合理工學院的畢業生, 除了成爲優秀的工程師、數學家和物理學家之外, 還成爲軍隊的軍官。

1812 年, 拿破崙的法國入侵俄羅斯。在這情況下, 拿破崙逼迫巴黎綜合理工學院的許多官員參戰。他們去了俄羅斯, 度過寒冬, 很快地被打敗, 成爲戰俘。俄羅斯軍隊救了法國軍官的命。他們被囚禁在鄉下, 我相信在 Don River 附近。所有這些軍官都在那裡。無所事事。他們說: 好吧, 讓我們舉辦一個現今所謂的幾何學的研討會, 他們開始談論幾何學。這些人之中最有天賦的名爲 Jean-Victor Poncelet[17]。他回到巴黎時, 把這次研討會上討論的結果寫在了一本名爲《圖形的射影性質》的書中。這是有史以來第一本關於射影幾何的書。

射影幾何是由數學家在 19 世紀創建的。19 世紀時數學家研究過射影幾何。但義大利畫家在 15 世紀和 16 世紀就已經使用了射影幾何, 而且他們有演繹推理, 在當時的一些書中找得到, 真是令人著迷。有人說, 好吧, 我們會考慮這一點, 是的, 我們知道這一點不存在, 因爲它是兩條平行線相交處。這一點不存在, 但對我們來說, 它非常有用。因此, 無論如何, 我們都會將它視爲存在。義大利藝術家已經在使用射影幾何。這些從我十幾歲以來的種種事情一直縈繞在我的腦海裡。

我早年在香港時, 發現了一位奇特的人物。他現在是我非常要好的朋友, 他在大學的創意媒體學院 (the School of Creative Media), 那是大學的當代藝術學院。這人名叫 Hector Rodriguez[18]。他是西班牙人, 來自 Canary 群島, 不在西班牙本土。他是一位藝術家, 但他對數學很感興趣, 真的感興趣。他是我認識的唯一一個閱讀數學論文而不是數學家的人, 饒有興趣地閱讀它們。

他有一件藝術作品, 名爲 Theorem 8。他之所以創作, 是因爲他讀了一本線性代數的書, 書中有一個定理, 就是定理 8; 他意識到他可以對這個定理進行視覺詮釋; 這非常好。於是, 我們開始交談。他向我建議: 你爲什麼不爲我們學校的學生開一門數學和藝術的課程呢? 好, 我就去做。這是一次非常愉快的經歷, 因爲這些學生非常優秀, 非常活躍。

---

[17] Jean-Victor Poncelet (1788∼1867) 現代射影幾何的創始人之一。他研究與二次曲線相關的極點 (pole) 和極線 (polar line), 從而引導出對偶原理。

[18] Hector Rodriguez, 任教於香港城市大學創意媒體學院。他創作了各種數位印刷品和影像裝置, 在世界各地的不同場館和活動中展出。他的作品包括《Gestus: Judex》、《Res Extensa》和《Theorem 8》。他還撰寫有關遊戲、電影和哲學的論文。

在城市大學還有一位同事, Philippe Ciarlet[19], 是一位法國數學家, 釋賢熟知他。他畢業於巴黎綜合理工學院。所以他是軍官。畢業時, 他獲贈一把劍。Philippe 看過我在課堂使用的投影片, 並說: 這非常好, 你爲什麼不寫一本關於它的書呢? 我說: 何不呢? 我花了大約 4 或 5 年的時間寫這本書。最終, 我在藝術的許多不同分支中發現了數學結構; 我只是看了我可以實際操作的數學結構。我完全不理會諸如「哦, 這個矩形有黃金比例」之類的事情。我不關心這些東西, 而是關心藝術中更深層次的數學結構。我發現你可以在許多不同的藝術形式中找到數學結構, 這些結構可能發揮了作用。例如, 不同的知覺印象或感覺, 是由不同形式的對稱產生的。

劉: 喔, 真美妙。我想我們的美感, 很多時候, 是屬於數學性質的。例如, 在唐詩中, 他們關心對稱性: 水與火, 山與河; 某種反射對稱。而人們又往往稱賞那些打破對稱性、激盪心靈的詩歌。

C: 你知道, 基於明顯的理由, 我不能在我的書中提到任何與中國詩歌有關的東西; 明顯的理由是, 我無法閱讀任何中國詩歌。我只能看著文字, 告訴你我喜不喜歡某件書法。即就這一點, 也不是一個非常權威的意見。但我的書在兩個場合對中國藝術做了一點闡述。

我的書涉及所謂的美術和裝飾藝術。我各舉了一個例子。美術的例子與中國歷史上的繪畫和素描有關。這非常有趣, 因爲直到十八世紀, 中國繪畫始終不變地使用正交射影, 將它作爲 3D 場景射影到 2D 圖像的方法。因此平行線在繪製時保持平行。表現物件時, 物件的大小不會隨物件的位置而變化。不存在物體在後退時尺寸減小的特性。

這種情況在十八世紀發生了變化。一開始, 變化非常微妙。有個有趣的角色起了作用。有一位義大利人, 年輕時移居中國; 他是一名畫家, 也是耶穌會士的牧師。他的名字是 Giuseppe Castiglione。他過世前在中國住了 51 年, 因此大半生都在中國度過。他甚至有個我可能會讀錯的中文名字, 但我還是會嘗試: 郎世寧[20]。

C: Yeah, 郎世寧。

劉: 是的, 郎世寧。

C: 郎世寧最好的畫作在台北故宮博物院, 離這裡幾個街區。我最喜歡一幅名爲《百駿圖》。你肯定知道我提到的是哪一幅。

劉: 是的, 那是一幅很大的畫。

C: 這是一幅橫卷, 畫的是有馬的風景。我不知道你稱呼他 Castiglione 還是郎世寧。就稱他郎

---

[19] Philippe Ciarlet (1938～), 法國數學家, 在有限元素法、非線性彈性、板殼理論和應用微分幾何的數學分析方面有重要貢獻。

[20] 郎世寧 (Giuseppe Castiglione, 1688～1766), 義大利籍的天主教耶穌會傳教士和清朝宮廷畫家, 他在中國生活了五十多年, 歷仕康熙、雍正、乾隆三朝。他的畫作融合了中西方的繪畫技法和風格, 展現了清朝宮廷的人物、動物和風景。他也參與了圓明園西洋樓的設計和建造, 並引進了西方的透視學和明暗畫法。1728 年 (雍正六年), 郎世寧完成重要委任畫作《百駿圖》, 從劇場畫法的透視感, 呈現出百匹駿馬活動的野外風光。

世寧吧。在那幅畫中, 郎世寧打破了當時中國盛行的兩條規則。其一是: 他畫較遠的馬或樹時, 把它們畫得較小, 但這並不是突兀的事情, 因爲他畫的不是幾公里外的馬, 只是一匹稍微遠一點、變得稍微小一點的馬。所以這沒什麼太猛的。這是他打破的一條規則。

18 世紀另有一條規律。直到 18 世紀, 中國畫裡都沒有影子。我們可以稱這種光爲通用光 (universal light), 它來自四面八方, 不會在臉上留下陰影。郎世寧曾爲中國三位皇帝擔任宮廷畫家。其中一位皇帝是乾隆。他畫了一幅乾隆的肖像; 無疑地, 他沒有畫任何陰影, 因爲在畫中陰影被認爲是塵埃。

他畫《百駿圖》時, 做了不尋常的事情, 非常不尋常。他選定光線來自一個方向, 而後畫了一點陰影, 只是一點點。我的意思是, 如果你看馬蹄旁邊, 腿接觸地球的地方, 有一點腿的陰影, 但隨後就消失了。只是一點點陰影。

郎世寧, 他的想法就是用較小的尺寸來畫稍微遠一點的東西。我相信有一幅 1780 年代的木刻版畫, 18 世紀末的, 我把它放進了我的書中。那真是太奇妙了。那是一片風景, 有些房子。距離越遠房子就越小, 但每棟房子都沒依透視法的比例畫, 因爲要顧及平行線。我的意思是, 藝術家充分利用了這兩個系統。毫無困難地將它們混合在一起。

另一例是中國的格子, 它們既用於家具, 也用於製作牆壁。偶爾你走到一堵牆邊, 牆是實心的, 但在牆的某處, 你看到一個類似窗戶的矩形, 但它並不是真正的窗戶; 它有一些石頭雕刻出的格子。那是古時候雕刻的, 一直在那裡。技術上而言, 這些規則的格子就是壁紙。它們在平面上的兩個獨立方向保持不變 (invariant)。中國的石雕格子製造中心是四川省, 所以歷史上四川省有很多這樣的格子。你可以在一般木質家具上發現它們, 例如櫥櫃門。

有一個美國人對此很感興趣, 寫了兩本關於這些中國格子的書[21]。他名叫 Daniel Dye。他在 1930 年代寫了這些書。關於這些中國格子, 我寫了一整節, 發現了一個非常有趣的問題。這個講起來會些有點技術性。我提到它們是壁紙, 這意味著它們在兩個獨立方向平移會保持不變。當然, 壁紙也可能在平面上的其他運動下保持不變。例如, 它在反射下可以是不變的, 或者可以在 90 度或 60 度的旋轉下保持不變。結果發現, 你可以根據使壁紙保持不變的轉換群 (group of motions), 對壁紙進行分類。有 17 種不同類型的壁紙, 壁紙有 17 種不同的函數群。而在 Dye 的書中, 他只找到了其中的 14 種。因此中國格子的設計尚缺三種。迄今它們還沒被找到。所以我認爲它們可能沒有被使用過。

我向我的一些學生提議做一件事, 但沒有人願意承接; 我的提議是: 爲什麼不使用這三種類型來做設計呢? 我做不到, 因爲任何與繪畫有關的事情, 我都無能爲力。我不是藝術家, 但我的許多學生專攻藝術。所以, 對他們來說, 這應該很容易。我總是向他們提出這個建議, 但未曾有人接受過挑戰。

劉: 如今教數學時, 有個問題是如何讓學生產生興趣。你做的是可以引起學生興趣的一種途徑。

---

[21] Daniel Sheets Dye, Chinese Lattice Designs, vol. 1 and vol. 2, Harvard University Press, 1937.

如果學生, 一個非常好的學生, 只是遵循老師說的話, 通常不會太好。他們必須提出問題並受到刺激等等。所以這是一個非常好的過程。你甚至寫了一本關於它的書。這令人佩服。

尤: 你關於群集的論文被大量引用。

C: 是的, 這是真的。對我來說, 這在某種程度上是個非常出乎意料的成功, 其源由是我們寫了一篇關於語言進化的論文。這樣做是因為 Steve Smale 曾在 Berkeley 工作過。他與上海語言學家王士元 William Wang[22]是朋友。後來 Bill 和 Steve 都搬到了香港城市大學。他們都在那裡。Bill 曾向 Steve 解釋了他對語言起源和語言如何變遷的一些想法, Steve 建議我寫一篇關於語言變遷、語言進化的論文。所以, 我們寫了那篇論文。

一位名叫 Ali Jadbabaie[23]的人, 在美國工作, 寫封信給 Steve 說:「我讀了你關於語言和語言進化的論文, 但你的進化來自一個固定的矩陣。我對行為者之間的交互矩陣 (matrix of interaction) 變動不居的情況感興趣」。一個典型的例子是群集, 因為相互作用的矩陣取決於行為者之間、衆鳥之間的距離, 而當衆鳥飛行, 這些距離隨著發生變化。Jadbabaie給 Steve 寄了一篇關於群集的論文, Steve 讀了它。而後他來找我, 他說:「你知道, Felipe, 這篇論文中群集的條件取決於鳥群的整個狀態序列。如果有一個可以在時間 0 給出的條件會很有趣。在時間 0 時, 如果鳥群初始速度和初始位置之間滿足某些關係, 那就可以確保它們開始飛行後, 終會聚集在一起」。我們開始研究這個問題, 最後提出這樣一個條件。

我們發表了一篇論文[24]。我們發表的第二篇論文[25], 雖然不是那麼重要, 但在幾個方面擴展了第一篇論文。而後 Steve 忘記了這件事。隨後中國數學家 Jackie Shen[26]閱讀了這些論文, 立即以兩種方式擴展了它們。其中一種方式特別涉及你們兩位, 因為我們和 Smale 一起考慮的是有限數量的行為者, 譬如在連續時間或離散時間內進化的鳥類。從技術上講, 這是一個常微分方程組或微分方程組。就是這樣。Shen 所做的, 是延伸整個模型和主要結果, 擴展到具有某種密度的流體。你可以從一個情況過渡到另一個情況, 想像數以百萬計的小昆蟲、病毒或類似的東西, 而不是幾隻鳥。他用偏微分方程模擬這種情況。因此, 偏微分方程開始展現身手。我知道的一件事是, 在偏微分方程領域, 這篇論文廣獲青睞。一位在城市大學從事偏微分方程的同事向我解釋說:「你需要明白, 對我們來說, 偏微分方程就像一個玩具。如果你給我們一個新玩具, 我們就會玩它」。我不知道這有多少真實性, 這個解釋有多準確。但確實這是迄今為止我被引用最多的文章。這是我業餘做的事情, 不是我的專長。有很

[22]王士元 (William Shi-Yuan Wang, 1933∼) 語言學家, 專長於音韻學、中國語言文化史、歷史語言學、人類語言的演化。

[23]Ali Jadbabaie 任教於麻省理工學院, 研究社會和工程系統中的集體現象和群體決策。他使用控制理論、網路科學、動力系統、最佳化理論和相關學科的工具來解決與社交網路中的決策、輿論動態、社會學習及判斷聚合等問題。他也研究機器學習的最佳化理論、動態學及學習演算法的動態。

[24]Felipe Cucker, Steve Smale, Emergent behavior in flocks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52 (5): 852-862, 2007.

[25]Felipe Cucker, Steve Smale, The Mathematics of Emergence, *Japan J. Math.*, 2, 197-227, 2007.

[26]Jackie Jianhong Shen 現為 Goldman Sachs 的主管, 研究數位成像及演算法交易。

多關於 Cucker-Smale 偏微分方程的文章, 有我的名字在那裡, 但我對偏微分方程知之甚少。這有點尷尬。

劉: 所以他們從中提出了一個動力學理論。現在你退休了。你如何過退休生活呢? 我一直在提起 Nirenberg[27]的這個故事。他對我說過, 他想退休。然後他確實退休了。但他想退休的原因, 是他想閱讀所有經典的名著。他退休後, 我問他這件事, 他說:「沒做成。我仍然在做數學」。那麼, 對我們親愛的朋友 Felipe 來說, 正確的預測會是什麼?

C: 我與退休的關係有點矛盾。我不必退休。我是城市大學的講座教授, 講座教授原則上可以繼續工作。你繼續簽訂爲期兩年的合約。但我不想在之前的工作條件下繼續工作。
事實上, 我目前在辦公室所做的, 只是根據我們在英國的兩位同事完成的一篇論文, 準備一個會議演講。所以我還在工作。但我現在有更多的自由, 我不受教學或行政管理的限制。

劉: 很好的決定, 因爲如果你願意, 你可以繼續做數學, 可以寫一本書等等。現在, 你不受約束。很好。非常好。
你曾來台北告訴我關於 Cucker-Smale 模型的事。當時我們遭遇了一場大颱風, 如果你還記得的話, 所有地方都關門了。我們甚至無法走出數學大樓。當時行政人員黃素貞女士爲我們煮了美味的麵條。

C: 我記得很清楚。我記得我們要去參觀國立故宮博物院, 但它關了; 這可能是一年中唯一一天因爲颱風而關閉。我們去到那裡, 但它關門了。有些樹倒了, 他們需要把這些樹拔起來。是的, 我記得很清楚。很長一段時間以來, 我都想和太平一起參觀那個博物館, 但這次參觀因颱風而受挫。

劉: 是的。故宮博物院整年天天開放, 颱風除外。

C: 我最近曾和妻子一起來拜訪釋賢, 不是學術訪問, 是二月來探望朋友。我們去了博物館。我的妻子從未去過博物館, 之前未曾來過台北, 非常愉快。美中不足的是, 沒有展出郎世寧作品。我真的很想再仔細看看《百駿圖》。

劉: 你也有非屬數學的動機來再次造訪台北, 這很好。也許讓我們到此結束。謝謝, 希望很快能再見到你。

——本文訪問者劉太平、尤釋賢任職中央研究院數學研究所—

[27]Louis Nirenberg (1925~2020), 加拿大出生的美籍數學家, 對線性及非線性偏微分方程理論, 及其在複分析、幾何中的應用, 做出重大貢獻。2015 年獲頒 Abel 獎。